Zur Topologie der geschlossenen Kurven auf der Sphäre.

Von JULIUS V. SZ. NAGY in Szeged.

1. Einleitung.

Unter einer *Kurve* verstehen wir eine orientierte geschlossene Kurve auf der Sphäre (Fläche vom Geschlechte Null), die ausserhalb gewöhnlicher Doppelpunkte keinen anderen mehrfachen Punkt hat.

Eine Kurve lässt sich in einem ihrer Doppelpunkte auf zweierlei Arten aufschneiden, je nachdem die Kurve durch das Aufschneiden in zwei (orientierte und geschlossene) Kurven, oder in eine geschlossene, aber nicht orientierte Kurve übergeführt wird. Das Aufschneiden des Doppelpunktes wird im ersten Falle *Durchschnitt,* im zweiten Falle *Querschnitt* genannt. Der Durchschnitt in einem Schnittpunkte von zwei (orientierten geschlossenen) Kurven vereinigt die zwei Kurven in eine geschlossene und orientierte Kurve.

Schneidet man die n Doppelpunkte einer Kurve C alle durch, so erhält man eine gewisse Anzahl z von einfach geschlossenen orientierten Kurven, von denen keine zwei einander schneiden können. Diese einfach geschlossenen Kurven sind die *Zykel* der Kurve C.

Zerfällt die Kurve C mit n Doppelpunkten durch gewisse g Durchschnitte in $g+1$ einfach geschlossene orientierte Kurven, so sind diese $g+1$ Kurven *Kreise* der Kurve C. Die durchgeschnittenen g Doppelpunkte bilden eine *Knotengruppe* der Kurve C. Zu jeder Knotengruppe, die aus g $(1 \leqq g \leqq n)$ Doppelpunkten der Kurve besteht, gehören $g+1$ Kreise der Kurve. Zwei Kreise können einander schneiden, sie weichen also im allgemeinen von den Zykeln ab.

Schneidet man die Kurve C erstens im Doppelpunkte A, zweitens wieder die ursprüngliche Kurve C im Doppelpunkte B hindurch und haben die erhaltenen zwei Teilkurven in beiden Fällen dieselben Doppelpunkte und dieselben Schnittpunkte ausserhalb der Punkte A und B, so werden die Doppelpunkte A und B *konjugierte Doppelpunkte* genannt.

In dieser Abhandlung bestimmen wir den Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Zykel und der Kreise. Hat die Kurve C n Doppelpunkte, so charakterisieren wir sie durch eine Aufeinanderfolge der Doppelpunkte auf der Kurve, oder durch n Sehnen eines wirklichen Kreises. Auf Grund der letzten Charakterisierung der Kurve untersuchen wir die Eigenschaften der Knotengruppen und der konjugierten Doppelpunkte. Endlich bestimmen wir die möglichen Fälle der Kurven, zu denen nur eine Knotengruppe, oder nur aus je einem Doppelpunkte bestehende Knotengruppen gehören.

2. Der Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Kreise und der Zykel.

Besteht eine Knotengruppe einer Kurve C mit n Doppelpunkten aus g Doppelpunkten, so zerfällt die Kurve C durch die Durchschnitte der g Doppelpunkte in $g+1$ Kreise, die in den übrigen $n-g$ Doppelpunkten der Kurve C Schnittpunkte haben. Die Zahl $n-g$ ist eine gerade Zahl, weil zwei geschlossene Kurven auf der Sphäre eine gerade Anzahl von Schnittpunkten haben. Für die Anzahl der Kreise besteht also die Gleichung

$$g+1=n+1-(n-g)=n+1-2s \qquad (s\geqq 0).$$

Schneidet man auch die $2s$ Schnittpunkte der $g+1$ Kreise hindurch, so erhält man die z Zykel der Kurve C. Wir wollen beweisen, dass

$$z=n+1-2r\geqq g+1=n+1-2s \qquad (0\leqq r\leqq s)$$

ist.

Für den Beweis zeigen wir erst den folgenden

Hilfssatz: Ist die Gesamtanzahl der Doppelpunkte und Schnittpunkte für zwei Kurven C_1 und C_2 der Sphäre eine gerade Zahl $2s_{12}$, so kann man auf die Kurven C_1 und C_2 immer zwei solche Durchschnitte anwenden, dass die Anzahl der Kurven entweder unverändert bleibt, oder um zwei vermehrt wird.

Schneidet man nämlich einen Doppelpunkt der einen Kurve durch, so erhält man aus den Kurven C_1 und C_2 drei Kurven, für welche die Gesamtanzahl der Doppelpunkte und Schnittpunkte ungerade, nämlich $2s_{12}-1$ ist. Daraus folgt, dass wenigstens eine der drei Kurven einen Doppelpunkt hat. Durch den Durchschnitt dieses Doppelpunktes erhält man aus den drei Kurven vier Kurven. Die zwei Durchschnitte vermehren also die Anzahl der Kurven um zwei.

Die Kurven C_1 und C_2 werden durch den Durchschnitt eines ihrer Schnittpunkte in eine Kurve C' mit $2s_{12}-1$ Doppelpunkten vereinigt. Durch den Durchschnitt eines Doppelpunktes geht diese Kurve C' in zwei Kurven über.

Die Gesamtanzahl der Doppelpunkte und Schnittpunkte der Kurven, die aus den Kurven C_1 und C_2 durch die zwei Durchschnitte entstehen, ist in beiden Fällen $2s_{12}-2$, also wieder eine gerade Zahl.

Sind nun $C_1, C_2, \ldots, C_{g+1}$ die Kreise, in welche die Kurve C durch die g Durchschnitte in den Doppelpunkten der Knotengruppe zerfällt, so haben die Kreise $n-g=2s$ Schnittpunkte.

Haben die Kurven C_1 und C_2 $2s_{12}$ Schnittpunkte, so kann man sie auf Grund des Hilfssatzes durch s_{12} Paare der Durchschnitte in $2+2q_{12}$ $(q_{12}\geqq 0)$ einfach geschlossene Kurven überführen, die einander nicht schneiden.

Setzt man dieses Verfahren auf zwei beliebige der erhaltenen $g+1+2q_{12}$ Kurven fort, so erhält man endlich durch die Durchschnitte der $2s$ Schnittpunkte der Kreise $C_1, C_2, \ldots, C_{g+1}$ die $g+1+2q=z$ $(q\geqq 0)$ Zykel der Kurve C.

Es gilt also der Satz:

I. *Wird eine auf der Sphäre liegende Kurve, die ausserhalb n gewöhnlicher Doppelpunkte keinen anderen mehrfachen Punkt hat und aus z Zykeln besteht, durch g Durchschnitte in $g+1$ Kreise zerlegt, so besteht die Gleichung*

$$g+1=z-2q=n+1-2s,$$

wo q und s nichtnegative ganze Zahlen sind.

3. Die Charakterisierung einer Kurve der Sphäre durch eine Permutation und durch Sehnen einer Kreislinie.

Ist C eine auf einer Sphäre gelegene Kurve mit den Doppelpunkten $1, 2, \ldots, n$, so kann sie durch eine Aufeinanderfolge P_{2n} ihrer Doppelpunkte charakterisiert werden. Diese Aufeinanderfolge

P_{2n} ist eine Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, n$, in der jedes Element zweimal vorkommt.[1])

Durch den Durchschnitt eines Doppelpunktes zerfällt die Kurve in zwei Teilkurven C_1 und C_2. Man kann aus der Permutation P_{2n} die Doppelpunkte und die Schnittpunkte bestimmen.

Ist z. B.

$$12342567514376$$

die Aufeinanderfolge der sieben Doppelpunkte auf der Kurve C, so zerfällt die Kurve C durch den Durchschnitt des Doppelpunktes 1 in die Teilkurven C_1 und C_2, auf denen die Aufeinanderfolge der übrigbleibenden 6 Doppelpunkte der Kurve C

$$23425675 \text{ bzw. } 4376$$

ist.

Der Punkt 1 ist ein gewöhnlicher Punkt für beide Teilkurven C_1 und C_2. Die Kurve C_1 hat die Doppelpunkte 2 und 5, die Kurve C_2 hat aber keinen Doppelpunkt. Die Punkte 3, 4, 6 und 7 sind die Schnittpunkte der Kurven C_1 und C_2.

Man kann den folgenden Satz leicht einsehen:

II. *Ist P_{2n} eine der Kurve C zugehörige Aufeinanderfolge der n Doppelpunkte und bedeuten C_1 und C_2 die Teilkurven, in welche die Kurve C durch den Durchschnitt eines ihrer n Doppelpunkte zerlegt wird, so ist einer der übrigbleibenden $n-1$ Doppelpunkte der Kurve C ein Schnittpunkt bzw. Doppelpunkt für die Kurven C_1 und C_2, je nachdem die zu dem betreffenden Doppelpunkte gehörigen zwei gleichen Elemente in der Permutation P_{2n} von den dem durchgeschnittenen Doppelpunkte zugehörigen zwei Elementen abgetrennt bzw. nicht abgetrennt sind.*

Wir charakterisieren die Kurve C durch n Sehnen eines geometrischen Kreises K auf folgende Weise:

Wir nehmen auf dem Rande des Kreises K $2n$ auf einander folgende Punkte an und bezeichnen je zwei dieser Punkte mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$, so dass die Aufeinanderfolge der $2n$ Zahlen auf dem Rande des Kreises K mit der Aufeinanderfolge der entsprechenden Doppelpunkte auf der Kurve C (oder mit der Auf-

[1]) Wir haben in der *Math. Zeitschrift*, 26 (1927), S. 584 den folgenden Satz bewiesen:

Die Kurven der Sphäre, zu denen — bei entsprechender Bezeichnung der Doppelpunkte — dieselbe Permutation gehört, können durch Verbiegung im dreidimensionalen Raume ohne Selbstdurchdringung ineinander übergeführt werden.

einanderfolge der entsprechenden Elemente in der Permutation P_{2n}) übereinstimmt. Verbinden wir nun je zwei Punkte des Kreises K, die mit derselben Zahl bezeichnet sind, die also demselben Doppelpunkte der Kurve C entsprechen, mit je einer Sehne, so stellt die Lage dieser n Sehnen im Kreise K die Aufeinanderfolge der Doppelpunkte auf der Kurve C dar.

Wir werden die n Sehnen samt dem Kreise K im folgenden *Sehnenfigur der Kurve* C nennen.

Zwei solchen Doppelpunkten, deren Elementenpaare in der zur Kurve C gehörigen Permutation P_{2n} von einander abgetrennt bzw. nicht abgetrennt sind, entsprechen zwei solche Sehnen der Sehnenfigur von C, die einander schneiden bzw. nicht schneiden.

Auf Grund des Satzes II gilt also der Satz:

III. *Zu jeder Kurve mit n Doppelpunkten auf der Sphäre gehört eine Sehnenfigur, die von n Sehnen eines eigentlichen Kreises gebildet wird. Zwischen den Doppelpunkten der Kurve und den Sehnen der Sehnenfigur besteht eine wechselseitig eindeutige Beziehung. Zwei Doppelpunkten der Kurve entsprechen zwei Sehnen der Sehnenfigur, die einander schneiden bzw. nicht schneiden, je nachdem der eine Doppelpunkt nach dem Durchschnitte des anderen ein Schnittpunkt für die zwei Teilkurven von C bzw. ein Doppelpunkt für die eine dieser Teilkurven ist.*

Schneidet man eine Kurve C in einem ihrer Doppelpunkte hindurch, so haben die erhaltenen zwei Teilkurven eine gerade Anzahl der Schnittpunkte. Daraus folgt der Satz:

IV. *In der Sehnenfigur einer Kurve wird jede Sehne von einer geraden Anzahl der übrigen Sehnen geschnitten.*

4. Über die Knotengruppen.

g Doppelpunkte einer Kurve mit n Doppelpunkten bilden eine Knotengruppe, wenn die Durchschnitte der g Doppelpunkte die Kurve in $g+1$ Kreise überführen. Die $g+1$ Kreise haben keinen Doppelpunkt, sie können aber eine gerade Anzahl von Schnittpunkten haben. Die Zahl $n-g$ ist also gerade. Daraus folgt der Satz:

V. *Jede Knotengruppe einer Kurve mit n Doppelpunkten auf der Sphäre besteht aus einer geraden bzw. ungeraden Anzahl der Doppelpunkte, je nachdem n eine gerade bzw. ungerade Zahl ist.*

Wenn es auf der Sphäre h Kurven gibt, so wird die Anzahl der Kurven durch den Durchschnitt eines Doppelpunktes einer Kurve um eins vermehrt, durch den Durchschnitt eines Schnittpunktes von zwei Kurven um eins vermindert.

Durch Durchschnitte in g Doppelpunkten einer Kurve erhält man also aus der Kurve nur dann $g+1$ Kurven, wenn die g Durchschnitte alle in den Doppelpunkten der durch die vorigen Durchschnitte erhaltenen Teilkurven stattfinden. Daraus folgen die Sätze:

VI. *Schneidet man in k beliebigen Punkten $(k<g)$ einer aus g Doppelpunkten bestehenden Knotengruppe die Kurve C hindurch, so haben die $k+1$ Teilkurven der Kurve C in den $g-k$ übrigbleibenden Doppelpunkten der Knotengruppe Doppelpunkte und keine Schnittpunkte.*

VII. *Die Doppelpunkte einer Knotengruppe sind umtauschbar.*

Den Doppelpunkten einer Knotengruppe auf einer Kurve C entsprechen — nach den Sätzen III und VI — solche Sehnen in der Sehnenfigur der Kurve, die keinen Schnittpunkt haben.

Wird die Kurve C in den Doppelpunkten einer aus g Doppelpunkten bestehenden Knotengruppe durchgeschnitten, so wird jeder der übrigen $n-g$ Doppelpunkte der Kurve ein Schnittpunkt von zwei Kreisen der Kurve C.

Man kann also auf Grund der Sätze III und IV den folgenden Satz aussprechen:

VIII. *In der Sehnenfigur einer Kurve mit n Doppelpunkten entspricht jeder aus g Doppelpunkten bestehenden Knotengruppe eine Sehnengruppe, die von solchen g Sehnen gebildet wird, von denen keine zwei einander schneiden und von denen jede Sehne wenigstens von zwei der übrigen $n-g$ Sehnen geschnitten wird. Umgekehrt: jeder Sehnengruppe von den genannten Eigenschaften in der Sehnenfigur entspricht eine Knotengruppe der Kurve.*

Wir wollen die zu einer Knotengruppe gehörigen Kreise einer Kurve in der Sehnenfigur charakterisieren. Aus diesem Grunde fassen wir die Beziehung zwischen der Kurve und ihrer Sehnenfigur auf folgende Weise auf:

IX. *Die Punkte einer Kurve mit n Doppelpunkten lassen sich stetig und wechselseitig eindeutig auf den Punkten einer Kreislinie K abbilden. In dieser Abbildung entsprechen jedem Doppelpunkte der Kurve zwei verschiedene Punkte der Kreislinie, so dass die Aufeinanderfolge der n Doppelpunkte auf der Kurve mit der Auf-*

einanderfolge der entsprechenden $2n$ Punkte auf dem Kreise K übereinstimmt. Die Kurve wird von ihren n Doppelpunkten in $2n$ Strecken geteilt, die sich auf die $2n$ Kreisbögen des Kreises K abbilden lassen. Werden die n Punktpaare des Kreises K, die den n Doppelpunkten der Kurve entsprechen, durch n Sehnen verbunden, so erhält man die Sehnenfigur der Kurve.[2])

Aus dieser Abbildung folgt der Satz:

X. *Schneidet man auf einer Kurve die Doppelpunkte einer aus g Doppelpunkten bestehenden Knotengruppe hindurch, so entsprechen die erhaltenen $g+1$ Kreise der Kurve eindeutig den $g+1$ Kreisteilen, in welche das Innere des Kreises K von der zu der Knotengruppe gehörigen Sehnengruppe zerteilt wird. Ist der eine dieser $g+1$ Kreisteile von h Kreisbögen (und zumal von h Sehnen) begrenzt, so besteht der entsprechende Kreis der Kurve aus den h Strecken der Kurve, welche auf den h Kreisbögen abgebildet wurden. Liegt der eine Endpunkt einer Sehne s in der Sehnenfigur der Kurve auf dem Rande des einen Kreisteiles, der andere Endpunkt auf dem Rande eines anderen Kreisteiles, so haben die entsprechenden zwei Kreise der Kurve in dem der Sehne s zugehörigen Doppelpunkte einen Schnittpunkt.*

5. Über die konjugierten Doppelpunkte.

Sind A und B zwei Doppelpunkte einer Kurve C auf der Sphäre und haben die zwei Teilkurven, in welche die Kurve C durch den Durchschnitt des Doppelpunktes A zerfällt, ausserhalb des Punktes B dieselben Doppelpunkte und dieselben Schnittpunkte, wie die zwei Teilkurven ausserhalb von A, welche aus C durch den Durchschnitt des Doppelpunktes B entstehen, so nennen wir die Doppelpunkte A und B *konjugierte Doppelpunkte.* Diese Beziehung bezeichnen wir durch das Zeichen $A - B$.

Ist der Punkt B ein Doppelpunkt für die eine der zwei Teilkurven C_1 und C_2, in welche die Kurve C durch den Durchschnitt des Doppelpunktes A zerfällt, so werden die Doppelpunkte A und B *konjugierte Doppelpunkte erster Art* genannt und durch $A \overset{(1)}{-} B$ bezeichnet. Ist aber der Punkt B ein Schnittpunkt der

---

[2]) Die Kurve C mit ihren n Doppelpunkten bildet nach der Benennung von J. Petersen, Die Theorie der regulären Graphs, *Acta Math.*, **15** (1891), S. 193—220, einen regulären Graph vierten Grades. Der Kreis K ist der zugehörige ausgestreckte Graph (s. a. a. O., S. 197).

Teilkurven C_1 und C_2, so werden die Doppelpunkte A und B *konjugierte Doppelpunkte zweiter Art* genannt und durch $A \overset{(2)}{—} B$ bezeichnet.

Aus der Beziehung $A \overset{(1)}{—} B$ folgt die Beziehung $B \overset{(1)}{—} A$ und aus der Beziechung $A \overset{(2)}{—} B$ folgt $B \overset{(2)}{—} A$, weil die zwei Teilkurven, in welche die Kurve C durch den Durchschnitt des Doppelpunktes A bzw. B zerfällt, eine gerade Anzahl von Schnittpunkten haben.

Nennt man die zwei Sehnen in der Sehnenfigur einer Kurve mit n Doppelpunkten, die zu zwei konjugierten Doppelpunkten gehören, konjugierte Sehnen, so sieht man leicht ein, dass die Sehnen eines konjugierten Sehnenpaares von einer beliebigen der übrigen $n-2$ Sehnen in der Sehnenfigur entweder beide geschnitten oder beide nicht geschnitten werden. Zwei konjugierte Sehnen sind von der ersten bzw. zweiten Art, je nachdem sie einander nicht schneiden bzw. schneiden. Die konjugierten Sehnen lassen sich durch diese Eigenschaften definieren.

Wir beweisen den folgenden Satz:

XI. *Sind die Sehnen a_1, a_2 und die Sehnen a_1, a_3 in einer Sehnenfigur konjugiert, so sind je zwei der Sehnen a_1, a_2, a_3 konjugierte Sehnen derselben Art.*

Für den Beweis zeigen wir erst, dass die Beziehungen $a_1 — a_2$ und $a_1 — a_3$ zugleich nur dann bestehen können, wenn beide Beziehungen von derselben Art sind.

Beständen nämlich die Beziehungen $a_1 \overset{(1)}{—} a_2$ und $a_1 \overset{(2)}{—} a_3$, so wäre die Sehne a_1 und — wegen der Beziehung $a_1 \overset{(1)}{—} a_2$ — auch die Sehne a_2 von der Sehne a_3 geschnitten. Dann wären aber die Sehne a_1 und a_3 nicht konjugiert, weil nur die eine Sehne (a_3) von der Sehne a_2 geschnitten würde.

Daraus folgt, dass die Beziehungen $a_1 — a_2$ und $a_1 — a_3$ nur dann bestehen können, wenn entweder $a_1 \overset{(1)}{—} a_2$ und $a_1 \overset{(1)}{—} a_3$, oder $a_1 \overset{(2)}{—} a_2$ und $a_1 \overset{(2)}{—} a_3$ sind.

Wir beweisen jetzt, dass auch die Beziehung $a_2 — a_3$ besteht, wenn die Beziehungen $a_1 — a_2$ und $a_1 — a_3$ bestehen. Ist nämlich s eine von den Sehnen a_1, a_2, a_3 verschiedene Sehne der Sehnenfigur, so werden die Sehnen a_2 und a_3 wegen der Beziehungen $a_1 — a_2$ und $a_1 — a_3$ von s geschnitten bzw. nicht geschnitten, je nachdem die Sehne a_1 von s geschnitten bzw. nicht geschnitten wird. Die Sehne a_1 schneidet keine bzw. beide der Sehnen a_2

und a_3, je nachdem die Beziehungen $a_1 - a_2$ und $a_1 - a_3$ von erster bzw. zweiter Art sind.

Aus den Beziehungen $a_1 \overset{(1)}{—} a_2$ und $a_1 \overset{(1)}{—} a_3$ bzw. $a_1 \overset{(2)}{—} a_2$ und $a_1 \overset{(2)}{—} a_3$ folgt also die Beziehung $a_2 \overset{(1)}{—} a_3$ bzw. $a_2 \overset{(2)}{—} a_3$.

Aus dem Satze XI folgt der Satz:

XII. *Sind A_1, A_2 und A_1, A_3 zwei Paare der konjugierten Doppelpunkte auf einer Kurve der Sphäre, so sind je zwei der drei Doppelpunkte A_1, A_2, A_3 konjugierte Doppelpunkte derselben Art.*

Man kann oft auf Grund des folgenden Satzes konjugierte Doppelpunkte auf einer Kurve erkennen:

XIII. *Sind die Doppelpunkte A und B auf einer orientierten Kurve der Sphäre durch zwei Strecken γ_1 und γ_2 verbunden, so sind sie konjugierte Doppelpunkte erster bzw. zweiter Art, je nachdem die orientierten Strecken γ_1 und γ_2 eine orientierte Kurve bilden oder nicht.*

Es gibt aber konjugierte Doppelpunkte, die eine andere Lage haben.

Dieser Satz lässt sich leicht durch die Sehnenfigur der Kurve einsehen. Sind a und b die Sehnen der Sehnenfigur, die den Doppelpunkten A und B entsprechen, so werden sie von jeder der übrigen Sehnen der Sehnenfigur entweder in je einem, oder in keinem Punkte geschnitten. Die Sehnen a und b schneiden einander nicht, wenn die Aufeinanderfolge der Doppelpunkte A und B auf der Kurve (oder auf dem Kreise der Sehnenfigur) $AB \ldots BA \ldots$ ist. Sie schneiden aber einander, wenn diese Aufeinanderfolge $AB \ldots AB \ldots$ ist.

Die n Doppelpunkte einer Kurve teilen die Kurve in $2n$ Strecken. Liegen beide Endpunkte einer Strecke in einem Doppelpunkte, so wird dieser Doppelpunkt eine *Schleife* genannt. Es gilt der Satz:

XIV. *Hat eine Kurve mehr als eine Schleife, so sind die Schleifen konjugierte Doppelpunkte erster Art.*

Einer Schleife entspricht nämlich eine Sehne in der Sehnenfigur, die von keiner der übrigen $n-1$ Sehnen geschnitten wird. Die Sehnen, die den Schleifen der Kurve entsprechen, sind also auf Grund der Definition der konjugierten Sehnen konjugierte Sehnen erster Art.

Sind a_1 und a_2 konjugierte Sehnen erster Art, so gehören sie einer Sehnengruppe zu, weil die Sehne a_2 von denjenigen und nur von denjenigen Sehnen der Sehnenfigur geschnitten wird, von denen die Sehne a_1 getroffen wird.

Sind a_1 und a_2 konjugierte Sehnen zweiter Art, so können sie nicht zu einer Sehnengruppe gehören, weil sie einander schneiden. Ersetzt man in einer Sehnengruppe, in der die Sehne a_1 enthalten ist, die Sehne a_1 durch a_2, so erhält man wieder eine Sehnengruppe. Wegen der Beziehung $a_1 \overset{(2)}{—} a_2$ schneidet nämlich die Sehne a_2 diejenigen und nur diejenigen Sehnen der Sehnenfigur, wie die Sehne a_1.

Daraus folgt der Satz:

XV. *Sind $A_1, A_2, \ldots, A_h$ konjugierte Doppelpunkte erster Art auf einer Kurve, so enthält eine beliebige Knotengruppe der Kurve entweder jeden dieser h Doppelpunkte, oder keinen. Sind aber $A_1, A_2, \ldots, A_h$ konjugierte Doppelpunkte zweiter Art, so enthält eine Knotengruppe höchstens einen dieser Doppelpunkte. Enthält eine Knotengruppe den Doppelpunkt A_1 und ersetzt man ihn durch je einen der Doppelpunkte $A_2, A_3, \ldots, A_h$, so erhält man wieder Knotengruppen.*

Wir wollen noch bemerken, dass es Kurven gibt, die keine konjugierten Doppelpunkte haben. Die Kurve mit acht Doppelpunkten und mit der Aufeinanderfolge 1234562748617385 der acht Doppelpunkte hat z. B. kein Paar konjugierter Doppelpunkte.

6. Kurven auf der Sphäre mit zentralen Doppelpunkten.

Besteht eine Knotengruppe einer Kurve C aus einem einzigen Doppelpunkte, so wird dieser Doppelpunkt ein *zentraler Doppelpunkt* genannt. Hat eine Kurve zentrale Doppelpunkte, so hat sie eine ungerade Anzahl von Doppelpunkten (Satz V).

Schneidet man den zentralen Doppelpunkt A einer Kurve C mit $2k+1$ Doppelpunkten hindurch, so zerfällt sie in zwei Kreise C_1 und C_2, die mit einander $2k$ Schnittpunkte haben.

Bezeichnet man diese $2k$ Schnittpunkte mit $1, 2, \ldots, 2k$, die Aufeinanderfolge dieser Schnittpunkte aus dem Punkte A ausgehend auf dem Kreise C_1 mit $1\,2 \ldots (2k-1)\,(2k)$, auf dem Kreise C_2 mit der Permutation P_{2k} der Elemente $1, 2, \ldots, 2k$, so ist die Aufeinanderfolge der $2k+1$ Doppelpunkte auf der Kurve C

$$A\,1\,2 \ldots (2k-1)\,(2k)\,A\,P_{2k}.$$

Der Kreis C_1 zerteilt die Sphäre in zwei Gebiete S_1 und S_2, den Kreis C_2 in $2k$ Strecken. Die k Strecken, deren Endpunkte durch das erste, zweite, ..., letzte Elementenpaar der Permutation P_{2k} bestimmt sind, liegen in dem einen der Gebiete S_1 und S_2. Die übrigen k Strecken des Kreises C_2 liegen in dem anderen Gebiete und werden durch die Paare der $2i$-ten und $2i+1$-ten Elemente von P_{2k} $(i=1, 2, \ldots, k; 2k+1 \equiv 1)$ hergestellt.

Die im Gebiete S_1 (oder S_2) liegenden k Strecken des Kreises C_2 schneiden einander nicht. Die zwei Endpunkte einer der im Gebiete S_1 (oder S_2) liegenden Strecke können also auf dem Kreise C_1 die Endpunkte irgendeiner der übrigen $k-1$ Strecken nicht abtrennen.

Daraus folgt, dass die geraden Zahlen in der Permutation P_{2k} an den geraden, die ungeraden Zahlen an den ungeraden Stellen stehen und dass es in der Aufeinanderfolge P_{2k} weder unter den geraden, noch unter den ungeraden Zahlenpaaren solche zwei Paare gibt, die in der natürlichen Zahlenreihe einander trennen. Die ungeraden bzw. geraden Zahlenpaare sind hier von dem $2i-1$-ten und $2i$-ten bzw. von dem $2i$-ten und $2i+1$-ten Elemente der Permutation P_{2k} $(i=1, 2, \ldots, k; 2k+1 \equiv 1)$ gebildet.

Eine Kurve C kann auch mehrere zentrale Doppelpunkte haben.

Jeder Doppelpunkt der Kurve C, für welche

$$P_{2k} \equiv 1\, 2 \ldots (2k)$$

ist, ist ein zentraler Doppelpunkt. Die $2k+1$ Doppelpunkte dieser Kurve sind alle konjugierte Doppelpunkte zweiter Art.

Aus der Definition der konjugierten Doppelpunkte folgt der Satz:

XVI. *Die zentralen Doppelpunkte einer Kurve auf der Sphäre sind konjugierte Doppelpunkte zweiter Art.*

7. Kurven auf der Sphäre mit einer einzigen Knotengruppe.

Ist C eine Kurve mit n Doppelpunkten, die nur eine einzige Knotengruppe hat, so enthält diese Knotengruppe jeden Doppelpunkt der Kurve. Durch den Durchschnitt eines Doppelpunktes zerfällt die Kurve in zwei Teilkurven, die mit einander keinen Schnittpunkt haben. Durch die Durchschnitte der n Doppelpunkte zerfällt die Kurve C in die $n+1$ Kreise, die mit den $n+1$ Zykeln übereinstimmen.

In der Sehnenfigur der Kurve schneiden keine zwei der Sehnen einander. Die $n+1$ Kreisteile, in welche der Kreis der Sehnenfigur durch die n Sehnen zerteilt wird, und die $n+1$ Zykel entsprechen einander wechselseitig eindeutig. Einem Kreisteile, der von k Sehnen und k Kreisbögen begrenzt ist, entspricht ein Zykel der Kurve, der aus k Bögen (Strecken) der Kurve besteht und k Ecken hat.

Nach Herrn F. Levi[3]) kann man diesen $n+1$ Kreisteilen einen zusammenhängenden Komplex von n Strecken und $n+1$ Knoten, d. h. einen Baum B_n entsprechen lassen.

Wählt man nämlich in jedem Kreisteile einen Punkt als Knotenpunkt, und verbindet man je zwei Knotenpunkte, die in benachbarten Kreisteilen liegen, durch je eine Strecke, so erhält man den Baum B_n.

Die Beziehung zwischen den $n+1$ Zykeln der Kurve und den $n+1$ Knotenpunkten des Baumes ist also wechselseitig eindeutig. Einem Zykel mit e Ecken entspricht ein Knotenpunkt, von dem e Strecken des Baumes ausgehen, und umgekehrt.

Daraus folgt, dass die Anzahl der wesentlich verschiedenen (nicht isotopen) Kurven C mit n Doppelpunkten und mit $n+1$ Zykeln mit der Anzahl aller auf einer Sphäre gelegenen verschiedenen B_n übereinstimmt.

Dabei sollen zwei B_n als nicht verschieden bezeichnet werden, wenn sie durch spezielle externe Transformation (ohne interne Transformation) ineinander übergeführt werden können.

Diese Anzahl wurde von Herrn F. Levi bestimmt.[4])

Es gilt also der Satz:

XVIII. *Die Anzahl der in einem dreidimensionalen Raume nicht isotopen Kurven auf der Sphäre, deren n Doppelpunkte eine einzige Knotengruppe bilden, ist der Anzahl der auf einer Sphäre gelegenen verschiedenen Baume mit* $n+1$ *Knotenpunkten gleich.*

(*Eingegangen am 14. Mai 1929.*)

---

[3]) F. Levi, Einige topologische Anzahlbestimmungen, *Christiaan Huygens*, 2 (1923), S. 305—314.

[4]) A. a. O. [3]).